



# 曲阜师范大学

## 本科线上教学优秀教学案例（二）



教务处 2020 年 3 月 27 日

### 《高等代数》线上教学心得

曲阜师范大学数学科学学院 刘丽教授

受疫情影响，2020 年注定是不平凡的一年，为严格落实教育部和省教育厅“停课不停学”的精神，我校于 3 月 2 日开展了线上教学活动。

在线上教学工作开展之前，学校及学院已经做了大量的、充足的准备工作，如校、院教务网站和教务群里从 2 月初就开

始发布 Mooc 资源以及调试“长江雨课堂”，都是为了能使线上教学活动顺利进行。因为第一次进行线上教学，我心情非常复杂和紧张。一方面是不知会遇到什么样的不确定因素，如上课时网络是否会通顺，自己操作是否得当等；另一方面是课本、备课本等以往上课的必备“武器”都不在身边。通过向高代组的老师们求助以及上网搜索下载后，找到了电子版课本和需要的教学资料；通过逐个试用并结合自身的软件水平，决定选择用钉钉直播授课，用 QQ 群与学生平时互动答疑及布置批改作业的方式开展线上教学活动。

具体的教学过程安排如下：

首先是课前预习。通过 QQ 群给学生上传了高等代数课本，同时找到与课本配套的 Mooc 资源发给同学们，让同学可以提前了解课堂内容。

高代通知群

聊天 公告 相册 文件 作业 设置

共8个文件 (已使用6.90MB/10GB)

文件	更新时间	过期时间
批注 2020-03-18 102852.jpg	2020-03-18 10:31	永久
批注 2020-03-18 102924.jpg	2020-03-18 10:31	永久
批注 2020-03-18 103050.jpg	2020-03-18 10:31	永久
第六章第一节.csv	2020-03-18 10:07	永久
北大版高等代数 第四版.pdf	2020-03-13 7:58	永久
第五章第一节二次型及其矩阵表示.pdf	2020-03-03 10:03	永久

**收到**

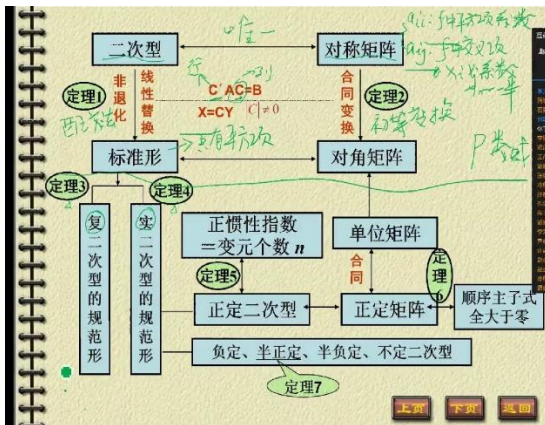
刘丽 2020/2/24 11:16:03

<https://www.icourse163.org/learn/AYNU-1206699844?tid=1450325467#/learn/content?type=detail&id=1217577001>

**高等代数**  
AYNU007,高等代数,安阳师范学院,安阳师范学院,中国大学 MOOC (慕课)

分享 收藏 打开

其次是课堂安排。每次上课前，提前十分钟发起直播，并打开回放和连麦功能。回放功能可以让学生课下对不明白的知识点及时回顾复习，连麦功能可以随时与学生进行互动并让学生在上课过程中精力集中。通过钉钉直播的屏幕分享功能，在进行PPT讲解的同时配合触控笔进行定理、结论的证明过程，最大程度的还原课堂板书教学的效果。



例1 引例1, 2中的  $P^n, P[x]$  均为数域  $P$  上的线性空间.  
 例2 数域  $P$  上的次数小于  $n$  的多项式的全体, 再添上零多项式作成的集合, 按多项式的加法和数量乘法构成数域  $P$  上的一个线性空间, 常用  $P[x]$  表示.  
 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$   
 $g(x) = -x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0$   
 $f+g \in V$  ?

加法满足下列四条规则:  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$   
 ①  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$  交换律  
 ②  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$  结合律  
 ③ 在  $V$  中有一个元素  $0$ , 对  $\forall \alpha \in V$ , 有  $\alpha + 0 = \alpha$  (具有这个性质的元素  $0$  称为  $V$  的零元素)  
 ④ 对  $\forall \alpha \in V$ , 都有  $V$  中的一个元素  $\beta$ , 使得  $\alpha + \beta = 0$ ; ( $\beta$  称为  $\alpha$  的负元素)  
 数量乘法满足下列两条规则:  
 ⑤  $1\alpha = \alpha$                       ⑥  $k(l\alpha) = (kl)\alpha$   
 数量乘法与加法满足下列两条规则:  
 ⑦  $(k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha$       ⑧  $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$

☆ 空集: 不含任何元素的集合, 记为  $\emptyset$ .  
 注意:  $\{\emptyset\} \neq \emptyset$   
 约定: 空集是任意集合的子集  
 2、集合间的关系  
 ☆ 如果  $B$  中的每一个元素都是  $A$  中的元素, 则称  $B$  是  $A$  的子集, 记作  $B \subseteq A$ , (读作  $B$  包含于  $A$ )  
 $B \subseteq A$  当且仅当  $\forall x \in B \Rightarrow x \in A$   
 ☆ 如果  $A, B$  两集合含有完全相同的元素, 则称  $A$  与  $B$  相等, 记作  $A=B$ .  
 $A=B$  当且仅当  $A \subseteq B$  且  $B \subseteq A$

2、令  $f: x \mapsto \frac{1}{x}, g: x \mapsto \frac{1}{x}, x \in R^+$ , 问:  $g(x) = \frac{1}{x}$   
 1)  $g$  是不是  $R^+$  到  $R^+$  的双射?  $g$  是不是  $f$  的逆映射?  
 2)  $g$  是不是可逆映射? 若是的话, 求其逆.  
 解: 1)  $g$  是  $R^+$  到自身的双射.  
 $\because \forall x, y \in R^+$ , 若  $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$ , 则  $x=y$ ,  $g$  是单射.  
 并且  $\forall x \in R^+$ , 有  $\frac{1}{x} \in R^+$ , 使  $g(\frac{1}{x}) = x$ , 即  $g$  是满射.  
 又  $\because f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$ ,  
 $g \neq I_{R^+}$ ,  $g$  不是  $f$  的逆映射.

2)  $M=Z, M'=Z^+, N=\{0\} \cup Z^+$   
 $\sigma: \sigma(n) = |n|, \forall n \in Z$   $N \cap \{0\} = \emptyset \in M = Z^+$  (不是)  
 $\tau: \tau(n) = |n| + 1, \forall n \in Z$   
 3)  $M = P^{n \times n}, M' = P$ , ( $P$  为数域)  
 $\sigma: \sigma(A) = |A|, \forall A \in P^{n \times n}$  (是)  
 4)  $M = P, M' = P^{n \times n}$ , ( $P$  为数域)  
 $\tau: \tau(a) = aE, \forall a \in P$  ( $E$  为  $n$  级单位矩阵)

再次是课后习题讲解。在处理课后习题时，通过触控笔和 Whiteboard 软件来详细讲解和书写每道题目的思路和步骤，并标出重点。

$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2$   
 $= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \right)$   
 $= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$   
 $= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i^2 - 2x_i x_j + x_j^2)$   
 $= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2$   
 对  $r$  组数和系数  $C_1, \dots, C_r$  有  
 $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^r (C_i - x_j)^2 \geq 0$   
 $\therefore f$  非负

$\therefore$  习题 P. 8. 54.  $PA = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   $\neq r = r(A)$   
 $Q^T A^T P^T P A b = \begin{pmatrix} cr & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad r(A^+)$   
注意  $A^+ A x = 0$  与  $A x = 0$  同解  
 $n - r(A) = n - r(A) \Rightarrow r(A^+) = r(A)$   
 当  $A x = 0$  有解一定是  $A^+ A x = 0$  的解  
 $\therefore$  设  $b_0$  为  $A^+ A x = 0$  的解  $\therefore A x = 0$   
 $\therefore x^T A^+ A x = 0$   
 $\therefore (Ax)^T (Ax) = 0$   
 令  $y_0 = Ax = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$   
 $\therefore (Ax)^T (Ax) = y_0^T y_0 = y_1^2 + \dots + y_n^2 = 0$   
 $\therefore y_i = 0 \quad \therefore y_0 = Ax = 0$

2.  $A = B_1 + B_2 + \dots + B_r$ , 证  $r(A) = r$ , 证  $A = B_1 + B_2 + \dots + B_r$   
 其中  $r(B_i) = 1, i=1, 2, \dots, r$   
 找  $B_i, B_i^T = B_i$   
 由定理 2.10 可证  $r(A) = r$   
 $C^T A C = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_r & & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (\neq r = r(A))$   
 $= \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_r & & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$   
 $\therefore A = (C^T)^+ D C^+ + \dots + (C^T)^+ D C^+ = \sum_{i=1}^r (C^T)^+ D_i C^+ = P$   
 $\therefore A = B_1 + \dots + B_r \quad B_i = (C^T)^+ D_i C^+ = (C^T)^+ D_i C^+$

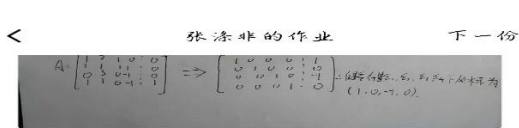
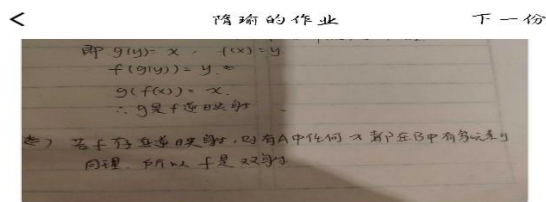
4.  $A = -A \Leftrightarrow \exists X \neq 0, X^T A X = 0$   
 $(\Rightarrow)$  取  $X = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T = X^T (-A) X = -X^T A X$   
 $= -X^T A X$   
 $\therefore X^T A X = 0$   
 $(\Leftarrow)$  证  $a_{ij} = 0 \quad a_{ij} = -a_{ji} \quad i, j \quad A = (a_{ij})$   
 取  $X_i = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)^T = e_i$   
 $X_i^T A X_i = e_i^T A e_i = a_{ii} = 0 \quad i=1, 2, \dots, n$   
 再取  $X_{ij} = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T = e_i + e_j \quad i \neq j$   
 $X_{ij}^T A X_{ij} = a_{ii} + a_{jj} + a_{ij} + a_{ji} = 0$   
 $\therefore a_{ii} = a_{jj} = 0 \quad \therefore a_{ij} + a_{ji} = 0 \Rightarrow a_{ij} = -a_{ji} \quad i \neq j$   
 $\therefore A = -A$

5. 实:  $r = r(A)$   $P$  正惯性指数.  $A = A$   
 $r(A) = 0 \quad p = 0$   
 $r(A) = 1 \quad p = 0, 1 \quad p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
 $r(A) = 2 \quad p = 0, 1, 2$   
 $\vdots$   
 $r(A) = r \quad p = 0, 1, 2, \dots, r$   
 $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$   
 $\Leftrightarrow f_1 = x_1^2 + \dots + x_r^2 \quad f_2 = -x_{r+1}^2 - \dots - x_n^2$

5. 复:  $r(A) = 0, 1, 2, \dots, r \rightarrow r(A) \quad V_1, V_2$  非零特征值  
 $A$  非零,  $r(A) = r$   
 $r=0 \Leftrightarrow A=0 \rightarrow$  1 类  $\{0\} = V_1 \cup V_2$   
 $r=1 \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in K \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in K \cup V_2$   
 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in K \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in K \cup V_2$   
 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in K \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in K \cup V_2$   
 $r=2 \quad V_2 = \{A \in V \mid r(A) \geq 2\} \quad V_2 \neq \emptyset$

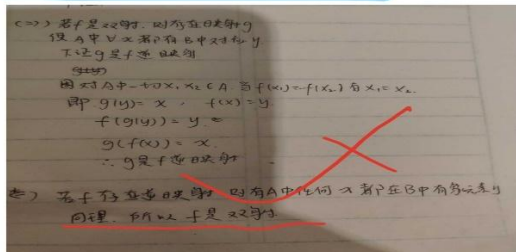
最后是课后作业。数学学习最容易犯的错误就是眼高手低，因此为了巩固学生对新知识的掌握以及了解学生在线上

教学的情况下的学习情况，我充分利用 QQ 群在线布置和批改作业的功能来完成这个教学的必备的环节。



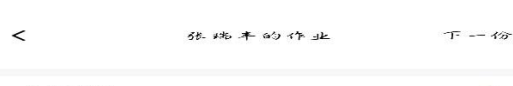
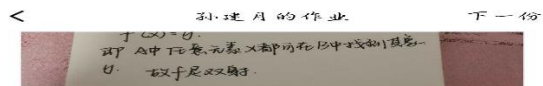
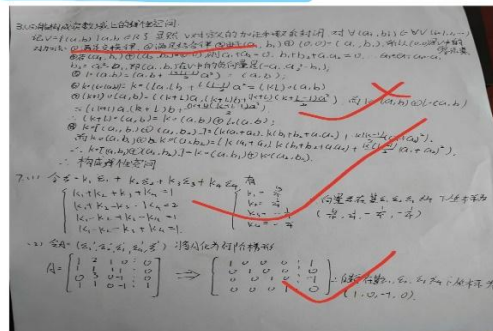
老师评语

双射的证明不严格，要证明即单又满



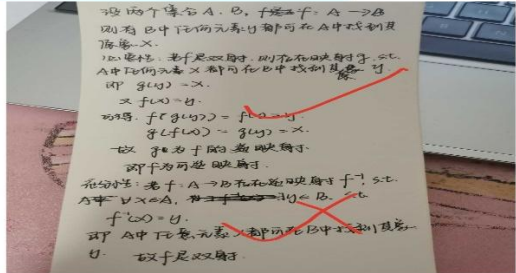
老师评语

交换律和结合律也需要严格证明



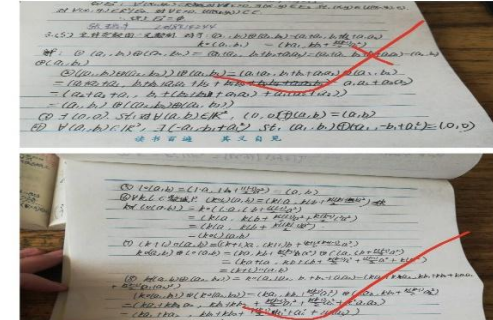
老师评语

充分性只证明了满射，没证明单射



老师评语

没有证明集合对运算封闭



目前，开学时间仍不确定，经过这段时间的摸索，虽然能

够顺利的进行线上教学，但仍然有不足的地方，比如连麦时仅能和一个学生互动，无法全面掌握其他学生的学习情况。在以后的教学过程中，我将持续探索和改善线上教学模式，通过增加章节测验、组织在线答疑课等方式，及时掌握学生的难点，解答学生的疑点。

我相信通过努力我们一定能早日渡过疫情的寒冬，迎来开学的暖春。

 <p>曲阜师范大学   教务处 QUFU NORMAL UNIVERSITY</p>	<p>联系方式 邮箱: <a href="mailto:jwc@qfnu.edu.cn">jwc@qfnu.edu.cn</a> 地址: 山东省曲阜市静轩西路57号 邮编: 273165</p>	
<p>Copyright© 2018 All Rights Reserved. 曲阜师范大学教务处版权所有</p>		

